

गणित

पाठ-8 त्रिकोणमिति का परिचय

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 8.1

प्रश्न 1.

$\triangle ABC$ में, जिसका कोण B समकोण है, $AB = 24\text{cm}$ और $BC = 7\text{cm}$ है। निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

(i). $\sin A$, $\cos A$

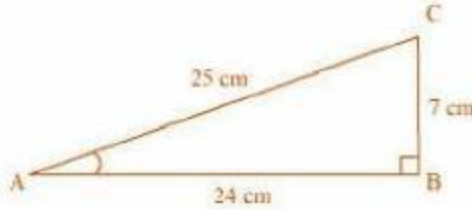
(ii). $\sin C$, $\cos C$

उत्तर 1:

$\triangle ABC$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$\begin{aligned}AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\&= (24\text{ cm})^2 + (7\text{ cm})^2 \\&= (576 + 49)\text{ cm}^2 \\&= 625\text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{625} = 25\text{ cm}$$

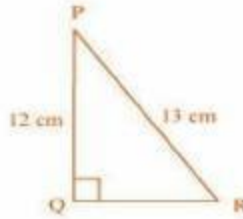


(i) $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$ और $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$

(ii) $\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$ और $\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$

प्रश्न 2.

आकृति 8.13 में, $\tan P - \cot R$ का मान ज्ञात कीजिए।



उत्तर 2:

$\triangle PQR$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$\begin{aligned}QR^2 &= PR^2 - PQ^2 \\&= (13)^2 - (12)^2 \\&= 169 - 144 = 25 \\&\Rightarrow QR = \sqrt{25} = 5\end{aligned}$$

इसलिए, $\tan P - \cot R = \frac{QR}{PQ} - \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12} - \frac{5}{12} = 0$

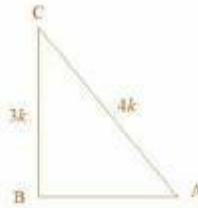
प्रश्न 3.

यदि $\sin A = \frac{3}{4}$ तो $\cos A$ और $\tan A$ का मान परिकलित कीजिए।

उत्तर 3:

दिया है $\sin A = \frac{3}{4}$

माना $\sin A = \frac{3k}{4k}$, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।



ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$

$$= (4k)^2 - (3k)^2$$

$$= 16k^2 - 9k^2$$

$$= 7k^2$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{7k^2} = \sqrt{7}k$$

$$\text{इसलिए, } \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{7}k}{4k} = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ और } \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{3k}{\sqrt{7}k} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

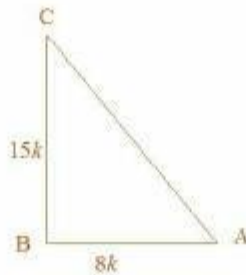
प्रश्न 4.

यदि $15 \cot A = 8$ हो तो $\sin A$ और $\sec A$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:

दिया है $15 \cot A = 8$

$$\Rightarrow \cot A = \frac{8}{15}$$



माना $\cot A = \frac{8k}{15k}$, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।

$\triangle ABC$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$\begin{aligned}AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\&= (8k)^2 + (15k)^2 \\&= 64k^2 + 225k^2 \\&= 289k^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{289k^2} = 17k$$

$$\text{इसलिए, } \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17} \text{ और } \sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{17k}{8k} = \frac{17}{8}$$

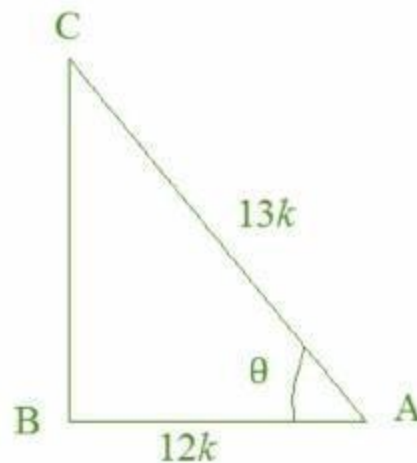
प्रश्न 5.

यदि $\sec \theta = \frac{13}{12}$, हो तो अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात परिकलित कीजिए।

उत्तर 5:

$$\text{दिया है } \sec \theta = \frac{13}{12}$$

माना $\sec \theta = \frac{13k}{12k}$, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।



$\triangle ABC$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$\begin{aligned}BC^2 &= AC^2 - AB^2 \\&= (13k)^2 - (12k)^2 \\&= 169k^2 - 144k^2 \\&= 25k^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{25k^2} = 5k$$

$$\text{इसलिए, } \sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}$$

$$\cos \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{13k}{5k} = \frac{13}{5}$$

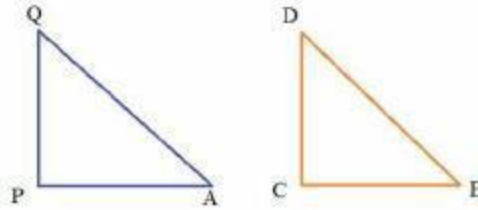
$$\text{और } \cot \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$$

प्रश्न 6.

यदि $\angle A$ और $\angle B$ न्यून कोण हो, जहाँ $\cos A = \cos B$ तो दिखाइए कि $\angle A = \angle B$ ।

उत्तर 6:

दिया है $\cos A = \cos B$



$$\cos A = \cos B$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{AQ} = \frac{BC}{BD}$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{BC} = \frac{AQ}{BD}$$

$$\text{माना } \frac{AP}{BC} = \frac{AQ}{BD} = k \quad \dots (i)$$

इसलिए, $AP = k(BC)$ तथा $AQ = k(BD)$

अब, $\triangle APQ$ तथा $\triangle BCD$ में

$$\frac{PQ}{CD} = \frac{\sqrt{AQ^2 - AP^2}}{\sqrt{BD^2 - BC^2}} = \frac{\sqrt{(k \cdot BD)^2 - (k \cdot BC)^2}}{\sqrt{BD^2 - BC^2}} = \frac{k\sqrt{BD^2 - BC^2}}{\sqrt{BD^2 - BC^2}} = k \quad \dots (ii)$$

समीकरण (i) और (ii) से,

$$\frac{AP}{BC} = \frac{AQ}{BD} = \frac{PQ}{CD}$$

अतः, $\triangle APQ \sim \triangle BCD$ [SSS प्रमेय से]

इसलिए, $\angle A = \angle B$

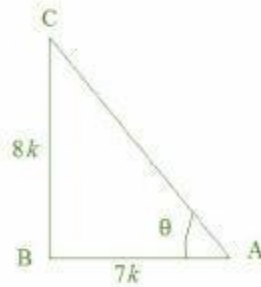
प्रश्न 7.

यदि $\cot \theta = \frac{7}{8}$, तो (i) $\frac{(1+\sin \theta)(1-\sin \theta)}{(1+\cos \theta)(1-\cos \theta)}$ (ii) $\cot^2 \theta$ का मान निकालिए?

उत्तर 7:

दिया है $\cot \theta = \frac{7}{8}$

माना $\cot \theta = \frac{7k}{8k}$, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।



$\triangle ABC$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$AC^2 = BC^2 + AB^2$$

$$= (8k)^2 + (7k)^2$$

$$= 64k^2 + 49k^2$$

$$= 113k^2$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{113k^2} = \sqrt{113}k$$

इसलिए,

$$(i) \frac{(1+\sin \theta)(1-\sin \theta)}{(1+\cos \theta)(1-\cos \theta)}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{7}{\sqrt{113}}\right)\left(1 - \frac{7}{\sqrt{113}}\right)}{\left(1 + \frac{8}{\sqrt{113}}\right)\left(1 - \frac{8}{\sqrt{113}}\right)}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{7}{\sqrt{113}}\right)^2}{1 - \left(\frac{8}{\sqrt{113}}\right)^2} = \frac{1 - \frac{49}{113}}{1 - \frac{64}{113}} = \frac{\frac{113-49}{113}}{\frac{113-64}{113}} = \frac{64}{49}$$

$$(ii) \cot^2 \theta$$

$$= (\cot \theta)^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$$

प्रश्न 8.

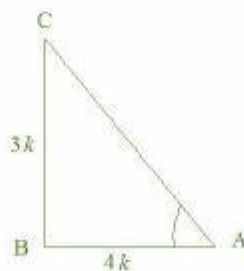
यदि $3 \cot A = 4$, तो जाँच कीजिए कि $\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ है या नहीं।

उत्तर 8:

दिया है $3 \cot A = 4$

$$\Rightarrow \cot A = \frac{4}{3}$$

माना $\cot A = \frac{4k}{3k}$, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।



ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$AC^2 = BC^2 + AB^2$$

$$= (3k)^2 + (4k)^2$$

$$= 9k^2 + 16k^2$$

$$= 25k^2$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{25k^2} = 5k$$

इसलिए,

$$\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1 - \frac{9}{16}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{\frac{16-9}{16}}{\frac{16+9}{16}} = \frac{7}{25}$$

और

$$\cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16-9}{25} = \frac{7}{25}$$

अतः, $\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ है।

प्रश्न 9.

त्रिभुज ABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

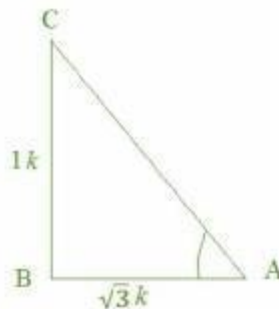
(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

(ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

उत्तर 9:

दिया है $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

माना $\tan A = \frac{1k}{\sqrt{3}k}$, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।



ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$AC^2 = BC^2 + AB^2$$

$$= (1k)^2 + (\sqrt{3}k)^2$$

$$= k^2 + 3k^2$$

$$= 4k^2$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{4k^2} = 2k$$

इसलिए, (i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

, (ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

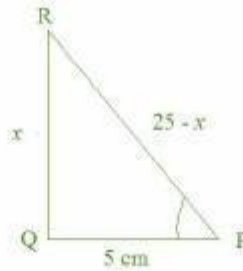
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

प्रश्न 10.

ΔPQR में, जिसका कोण Q समकोण है, $PR + QR = 25$ cm और $PQ = 5$ cm है। $\sin P$, $\cos P$ और $\tan P$ के मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 10:

दिया है ΔPQR में, कोण Q समकोण है



माना $QR = x$

इसलिए, $PR = 25 - x$

ΔPQR में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$PR^2 = PQ^2 + OQ^2$$

$$\Rightarrow (25 - x)^2 = (5)^2 + (x)^2$$

$$\Rightarrow 625 + x^2 - 50x = 25 + x^2$$

$$\Rightarrow 625 - 50x = 25$$

$$\Rightarrow 50x = 600$$

$$\Rightarrow x = 12$$

$$\Rightarrow QR = 12$$

इसलिए, $PR = 25 - 12 = 13$

अब, $\sin P = \frac{QR}{PR} = \frac{12}{13}$, $\cos P = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$ और $\tan P = \frac{QR}{PQ} = \frac{12}{5}$

प्रश्न 11.

बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। कारन सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(i) $\tan A$ का मान सदैव 1 से कम होता है।

(ii) कोण A के किसी मान के लिए $\sec A = \frac{12}{5}$

(iii) $\cos A$, कोण A के cosecant के लिए प्रयुक्त एक संक्षिप्त रूप है।

(iv) $\cot A$, $\cot$ और A का गुणनफल होता है।

(v) किसी भी कोण θ के लिए $\sin \theta = \frac{4}{3}$

उत्तर 11:

(i) असत्य,

क्योंकि $\tan A = \frac{\text{कोण } A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कोण } A \text{ की संलग्न भुजा}}$, यदि कोण की सम्मुख भुजा > संलग्न भुजा, तो $\tan A$ का मान 1 से अधिक होगा।

(ii) सत्य,

क्योंकि $\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{कोण } A \text{ की संलग्न भुजा}}$, हम जानते हैं कि कर्ण, संलग्न भुजा से सदैव बड़ी होती है।

(iii) असत्य,

क्योंकि $\cos A$, कोण A के cosine के लिए प्रयुक्त एक संक्षिप्त रूप है।

(iv) असत्य,

क्योंकि $\cot A$, कोण A का *cotangent* होता है।

(v) असत्य,

क्योंकि $\sin \theta = \frac{\text{कोण } A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$, हम जानते हैं कि कर्ण, सम्मुख भुजा से सदैव बड़ी होती है।

पाठ-8 त्रिकोणमिति का परिचय

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 8.2

प्रश्न 1.

निम्नलिखित के मान निकालिए:

(i). $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

(ii). $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

(iii).

$$\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$$

(iv).

$$\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$$

(v).

$$\frac{5 \cos^2 60^\circ + 4 \sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$$

उत्तर 1:

(i) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

मान रखने पर

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

(ii) $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

मान रखने पर

$$\begin{aligned} &= 2(1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= 2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 2 \end{aligned}$$

(iii)

$$\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$$

मान रखने पर

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + 2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}(2 + 2\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})}{(2\sqrt{6} + 2\sqrt{2})(2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})} \\ &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(2\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{24 - 8} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{16} \\ &= \frac{\sqrt{18} - \sqrt{6}}{8} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8} \end{aligned}$$

(iv) $\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$

मान रखने पर

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\frac{3\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{3}}}{\frac{3\sqrt{3} + 4}{2\sqrt{3}}} = \frac{(3\sqrt{3} - 4)}{(3\sqrt{3} + 4)} \\ &= \frac{(3\sqrt{3} - 4)(3\sqrt{3} - 4)}{(3\sqrt{3} + 4)(3\sqrt{3} - 4)} = \frac{(3\sqrt{3} - 4)^2}{(3\sqrt{3})^2 - (4)^2} \\ &= \frac{27 + 16 - 24\sqrt{3}}{27 - 16} = \frac{43 - 24\sqrt{3}}{11} \end{aligned}$$

(v)

$$\frac{5 \cos^2 60^\circ + 4 \sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$$

मान रखने पर

$$= \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - (1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{5\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{16}{3}\right) - 1}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{15 + 64 - 12}{4}}{\frac{4}{4}} = \frac{67}{12}$$

प्रश्न 2.

सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प का औचित्य दीजिए:

(i). $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$

(A) $\sin 60^\circ$

(B) $\cos 60^\circ$

(C) $\tan 60^\circ$

(D) $\sin 30^\circ$

(ii). $\frac{1 - \tan^2 45^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ}$

(A) $\tan 90^\circ$

(B) 1

(C) $\sin 45^\circ$

(D) 0

(iii). $\sin 2A = 2 \sin A$ तब सत्य होता है, जबकि A बराबर है:

(A) 0

(B) 30°

(C) 45°

(D) 60°

(iv). $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ}$ बराबर है:

(A) $\cos 60^\circ$

(B) $\sin 60^\circ$

(C) $\tan 60^\circ$

(D) $\sin 30^\circ$

उत्तर 2:

(i). $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$

मान रखने पर

$$= \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

हम जानते हैं कि $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

इसलिए, विकल्प (A) सही है।

(ii). $\frac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ}$

मान रखने पर

$$= \frac{1-(1)^2}{1+(1)^2} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

इसलिए, विकल्प (D) सही है।

(iii). $\sin 2A = 2 \sin A$

हम जानते हैं कि $\sin 0 = 0$

इसलिए, विकल्प (A) सही है।

(iv). $\frac{2 \tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$

मान रखने पर

$$= \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt{3}$$

हम जानते हैं कि $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

इसलिए, विकल्प (C) सही है।

प्रश्न 3.

यदि $\tan (A+B)=\sqrt{3}$ और $\tan (A-B)=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $0^{\circ} < A+B \leq 90^{\circ}$, $A > B$, तो A और B का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 3:

दिया है $\tan (A+B)=\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \tan (A+B)=\tan 60^{\circ}$$

$$\left[\text{क्योंकि } \tan 60^{\circ}=\sqrt{3} \right]$$

$$\Rightarrow A+B=60^{\circ}$$

... (i)

दिया है $\tan (A-B)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \tan (A-B)=\tan 30^{\circ}$$

$$\left[\text{क्योंकि } \tan 30^{\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

$$\Rightarrow A-B=30^{\circ}$$

... (ii)

समीकरण (i) और (ii) को हल करने पर

$$2A=90^{\circ}$$

$$\Rightarrow A=45^{\circ}$$

समीकरण (i) से

$$45^{\circ}+B=60^{\circ}$$

$$\Rightarrow B=15^{\circ}$$

इसलिए, $A=45^{\circ}$ और $B=15^{\circ}$

प्रश्न 4.

बताइए कि निम्नलिखित में कौन - कौन सत्य हैं या असत्य हैं। कारण सहित अपने उत्तर कि पुष्टि कीजिए।

(i). $\sin(A+B)=\sin A+\sin B$

(ii). θ में वृद्धि होने के साथ $\sin \theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।

(iii). θ में वृद्धि होने के साथ $\cos \theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।

(iv). θ के सभी मानों पर $\sin \theta=\cos \theta$.

(v). $A=0^{\circ}$ पर $\cot A$ परिभाषित नहीं है।

उत्तर 4:

(i) असत्य,

माना $A = 30^\circ$ और $B = 60^\circ$

इसप्रकार,

$$LHS = \sin(A + B) = \sin(30^\circ + 60^\circ) = \sin 90^\circ = 1 \text{ और}$$

$$RHS = \sin A + \sin B = \sin 30^\circ + \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \neq 1$$

अतः, $\sin(A + B) \neq \sin A + \sin B$

(ii) सत्य,

क्योंकि, हम जानते हैं कि $\sin 0^\circ = 0$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ और $\sin 90^\circ = 1$

इसप्रकार, θ में वृद्धि होने के साथ $\sin \theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।

(iii) असत्य,

क्योंकि, हम जानते हैं कि $\cos 0^\circ = 1$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ और $\cos 90^\circ = 0$

इसप्रकार, θ में वृद्धि होने के साथ $\cos \theta$ के मान में कमी होती है।

(iv) असत्य,

क्योंकि $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ लेकिन $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ होता है।

(v) सत्य,

क्योंकि $\tan 0^\circ = 0$, हम जानते हैं कि $\cot 0^\circ = \frac{1}{\tan 0^\circ} = \frac{1}{0}$ परिभाषित नहीं है।

पाठ—8 त्रिकोणमिति का परिचय

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 8.3

प्रश्न 1.

निम्नलिखित का मान निकालिए:

(i). $\frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$ (ii). $\frac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ}$ (iii). $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$ (iv). $\operatorname{cosec} 31^\circ - \sec 59^\circ$

उत्तर 1:

(i) $\frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$
$$= \frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ} = \frac{\cos(90^\circ - 18^\circ)}{\cos 72^\circ} \quad \left[\text{क्योंकि } \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta \right]$$
$$= \frac{\cos 72^\circ}{\cos 72^\circ} = 1$$

(ii) $\frac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ}$
$$\frac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ} = \frac{\cot(90^\circ - 26^\circ)}{\cot 64^\circ} \quad \left[\text{क्योंकि } \cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta \right]$$
$$= \frac{\cot 64^\circ}{\cot 64^\circ} = 1$$

(iii) $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$
$$\cos 48^\circ - \sin 42^\circ = \cos 48^\circ - \cos(90^\circ - 42^\circ) \quad \left[\text{क्योंकि } \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta \right]$$
$$= \cos 48^\circ - \cos 48^\circ = 0$$

(iv) $\operatorname{cosec} 31^\circ - \sec 59^\circ$
$$\operatorname{cosec} 31^\circ - \sec 59^\circ = \operatorname{cosec} 31^\circ - \operatorname{cosec}(90^\circ - 59^\circ) \quad \left[\text{क्योंकि } \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec \theta \right]$$
$$= \operatorname{cosec} 31^\circ - \operatorname{cosec} 31^\circ = 0$$

प्रश्न 2.

दिखाइए कि

(i). $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$
(ii). $\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0$

उत्तर 2:

(i). $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$

वाम पक्ष = $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ$

= $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \cot(90^\circ - 42^\circ) \cot(90^\circ - 67^\circ)$ [क्योंकि $\cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta$]

= $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \cot 48^\circ \cot 23^\circ$

= $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \times \frac{1}{\tan 48^\circ} \times \frac{1}{\tan 23^\circ} = 1 = \text{दाँया पक्ष}$

(ii). $\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0$

वाम पक्ष = $\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ$

= $\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \cos(90^\circ - 38^\circ) \cos(90^\circ - 52^\circ)$ [क्योंकि $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$]

= $\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \cos 52^\circ \cos 38^\circ$

= $0 = \text{दाँया पक्ष}$

प्रश्न 3.

यदि $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$, जहाँ $2A$ एक न्यून कोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 3:

दिया है $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$

$\Rightarrow \cot(90^\circ - 2A) = \cot(A - 18^\circ)$ [क्योंकि $\cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta$]

$\Rightarrow 90^\circ - 2A = A - 18^\circ$

$\Rightarrow 90^\circ + 18^\circ = 3A$

$\Rightarrow 3A = 108^\circ$

$\Rightarrow A = 36^\circ$

इसलिए, $A = 36^\circ$

प्रश्न 4.

यदि $\tan A = \cot B$, तो सिद्ध कीजिए कि $A + B = 90^\circ$

उत्तर 4:

दिया है $\tan A = \cot B$

$$\Rightarrow \cot(90^\circ - A) = \cot B \quad \left[\text{क्योंकि } \cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta \right]$$

$$\Rightarrow 90^\circ - A = B$$

$$\Rightarrow 90^\circ = A + B$$

इसलिए, $A + B = 90^\circ$

प्रश्न 5.

यदि $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$, जहाँ $4A$ एक न्यून कोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 5:

दिया है $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$

$$\Rightarrow \operatorname{cosec}(90^\circ - 4A) = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ) \quad \left[\text{क्योंकि } \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec \theta \right]$$

$$\Rightarrow 90^\circ - 4A = A - 20^\circ$$

$$\Rightarrow 90^\circ + 20^\circ = 5A$$

$$\Rightarrow 5A = 110^\circ$$

$$\Rightarrow A = 22^\circ$$

इसलिए, $A = 22^\circ$

प्रश्न 6.

यदि A, B और C त्रिभुज ABC के अंतः कोण हों, तो दिखाइए कि

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

उत्तर 6:

$$\text{वाम पक्ष} = \sin\left(\frac{B+C}{2}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{180^\circ - A}{2}\right) \quad \left[\text{क्योंकि } A + B + C = 180^\circ \right]$$

$$= \sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{A}{2} \quad \left[\text{क्योंकि } \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \right]$$

= दाया पक्ष

प्रश्न 7.

$\sin 67^\circ + \cos 75^\circ$ को 0° और 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए।

उत्तर 7:

हम जानते हैं कि $\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$ और $\cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)$

इसलिए, $\sin 67^\circ + \cos 75^\circ$

$$= \cos(90^\circ - 67^\circ) + \sin(90^\circ - 75^\circ)$$

$$= \cos 23^\circ + \sin 15^\circ$$

गणित

पाठ—8 त्रिकोणमिति का परिचय

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 8.4

प्रश्न 1:

त्रिकोणमितीय अनुपातों $\sin A$, $\cos A$ और $\tan A$ को के $\cot A$ पदों में व्यक्त कीजिए।

उत्तर 1:

(i). $\sin A$

$$= \sqrt{\sin^2 A}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}}$$

$$\left[\text{क्योंकि } \sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1 + \cot^2 A}}$$

$$\left[\text{क्योंकि } \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}$$

(ii). $\cos A$

$$= \sqrt{\cos^2 A}$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2 A}$$

$$\left[\text{क्योंकि } \cos^2 A = 1 - \sin^2 A \right]$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}}$$

$$\left[\text{क्योंकि } \sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A} \right]$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \cot^2 A}}$$

$$\left[\text{क्योंकि } \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A \right]$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \cot^2 A - 1}{1 + \cot^2 A}}$$

$$= \frac{\cot A}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}$$

(iii). $\tan A = \frac{1}{\cot A}$

$$\left[\text{क्योंकि } \tan A = \frac{1}{\cot A} \right]$$

प्रश्न 2:

$\angle A$ के अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को $\sec A$ के पदों में लिखिए।

उत्तर 2:

(i). $\sin A$

$$= \sqrt{\sin^2 A}$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{\sec^2 A}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sec^2 A - 1}{\sec^2 A}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}$$

$$\left[\text{क्योंकि } \sin^2 A = 1 - \cos^2 A \right]$$

$$\left[\text{क्योंकि } \cos A = \frac{1}{\sec A} \right]$$

(ii). $\cos A$

$$\cos A = \frac{1}{\sec A}$$

$$\left[\text{क्योंकि } \cos A = \frac{1}{\sec A} \right]$$

(iii). $\tan A$

$$= \sqrt{\tan^2 A}$$

$$= \sqrt{\sec^2 A - 1}$$

$$\left[\text{क्योंकि } \sec^2 A = 1 + \tan^2 A \right]$$

(iv). $\operatorname{cosec} A$

$$= \sqrt{\operatorname{cosec}^2 A}$$

$$= \sqrt{1 + \cot^2 A}$$

$$\left[\text{क्योंकि } \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A \right]$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 A}}$$

$$\left[\text{क्योंकि } \cot A = \frac{1}{\tan A} \right]$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{\sec^2 A - 1}}$$

$$\left[\text{क्योंकि } \sec^2 A = 1 + \tan^2 A \right]$$

$$= \sqrt{\frac{\sec^2 A - 1 + 1}{\sec^2 A - 1}}$$

$$= \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$$

(v). $\cot A$

$$= \sqrt{\cot^2 A}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\tan^2 A}}$$

$$\left[\text{क्योंकि } \cot A = \frac{1}{\tan A} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\sec^2 A - 1}} \quad \left[\text{क्योंकि } \sec^2 A = 1 + \tan^2 A \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$$

प्रश्न 3:

मान निकालिए:

(i). $\frac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ}$

(ii). $\sin 25^\circ \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \sin 65^\circ$

उत्तर 3:

(i). $\frac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ}$

$$= \frac{\sin^2 63^\circ + \cos^2 (90^\circ - 27^\circ)}{\cos^2 17^\circ + \sin^2 (90^\circ - 73^\circ)} \quad \left[\text{क्योंकि } \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta \text{ और } \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \right]$$

$$= \frac{\sin^2 63^\circ + \cos^2 63^\circ}{\cos^2 17^\circ + \sin^2 17^\circ}$$

$$= \frac{1}{1} = 1 \quad \left[\text{क्योंकि } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \right]$$

(ii). $\sin 25^\circ \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \sin 65^\circ$

$$= \cos(90^\circ - 25^\circ) \cos 65^\circ + \sin(90^\circ - 25^\circ) \sin 65^\circ$$

$$= \cos 65^\circ \cos 65^\circ + \sin 65^\circ \sin 65^\circ$$

$$= \cos^2 65^\circ + \sin^2 65^\circ = 1 \quad \left[\text{क्योंकि } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \right]$$

प्रश्न 4:

सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प की पुष्टि कीजिए:

(i). $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$ बराबर है:

(A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

(ii). $(1 + \tan \theta + \sec \theta)(1 + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta)$ बराबर है:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -1

(iii). $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$ बराबर है:

(A) $\sec A$ (B) $\sin A$ (C) $\operatorname{cosec} A$ (D) $\cos A$

(iv). $\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}$ बराबर है:

(A) $\sec^2 A$ (B) -1 (C) $\cot^2 A$ (D) $\tan^2 A$

उत्तर 4:

(i). $9\sec^2 A - 9\tan^2 B$

दिया है $9\sec^2 A - 9\tan^2 B$

$$= 9(\sec^2 A - \tan^2 B)$$

$$= 9(1) \quad \left[\text{क्योंकि } \sec^2 A - \tan^2 B = 1 \right]$$

$$= 9$$

इसलिए, विकल्प (B) सही है।

(ii). $(1 + \tan \theta + \sec \theta)(1 + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta)$

दिया है $(1 + \tan \theta + \sec \theta)(1 + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta)$

$$= 1 + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta + \tan \theta + \tan \theta \cot \theta - \tan \theta \operatorname{cosec} \theta + \sec \theta + \sec \theta \cot \theta - \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$$

$$= 1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + 1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta} \times \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta} \times \frac{1}{\sin \theta}$$

$\left[\text{क्योंकि } \tan \theta \cot \theta = 1 \right]$

$$= 1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + 1 - \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= 1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + 1 - \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= 2 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= 2 + \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 1}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= 2 + \frac{1-1}{\sin \theta \cos \theta} \quad \left[\text{क्योंकि } \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \right]$$

$$= 2 + 0 = 2$$

इसलिए, विकल्प (C) सही है।

(iii). $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$

दिया है $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$

$$= \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} \right) (1 - \sin A)$$

$$= \left(\frac{1 + \sin A}{\cos A} \right) (1 - \sin A)$$

$$= \frac{1 - \sin^2 A}{\cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos A}$$

$$= \cos A$$

इसलिए, विकल्प (D) सही है।

$$(iv). \frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}$$

$$\text{दिया है } \frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}$$

$$= \frac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A} \quad \left[\text{क्योंकि } \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A, \sec^2 A = 1 + \tan^2 A \right]$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 A} \right)}{\left(\frac{1}{\sin^2 A} \right)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 A} \times \frac{\sin^2 A}{1} = \tan^2 A$$

इसलिए, विकल्प (D) सही है।

प्रश्न 5:

निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिद्ध कीजिए, जहाँ वे कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित है, न्यून कोण है:

$$(i). (\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)^2 = \frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta}$$

$$(ii). \frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2 \sec A$$

$$(iii). \frac{\tan \theta}{1-\cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1-\tan \theta} = 1 + \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$$

$$(iv). \frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$$

$$(v). \text{सर्वसमिका } \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A \text{ को लागू करके}$$

$$\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$$

$$(vi). \sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$$

$$(vii). \frac{\sin \theta - 2 \sin^3 \theta}{2 \cos^3 \theta - \cos \theta} = \tan \theta$$

$$(viii). (\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$$

$$(ix). (\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$$

$$(x). \frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} = \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A} \right)^2 = \tan^2 A$$

उत्तर 5:

$$(i). (\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)^2 = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$\text{वाम पक्ष} = (\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2$$

$$= \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2$$

$$= \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}$$

$$= \frac{(1 - \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta}$$

$$[\text{क्योंकि } \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta]$$

$$= \frac{(1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}$$

$$= \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \text{दाया पक्ष}$$

$$(ii). \frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A$$

$$\text{वाम पक्ष} = \frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A + (1 + \sin A)^2}{(1 + \sin A) \cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A + 1 + \sin^2 A + 2 \sin A}{(1 + \sin A) \cos A}$$

$$= \frac{1 + 1 + 2 \sin A}{(1 + \sin A) \cos A}$$

$$[\text{क्योंकि } \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$$

$$= \frac{2 + 2 \sin A}{(1 + \sin A) \cos A}$$

$$= \frac{2(1 + \sin A)}{(1 + \sin A) \cos A}$$

$$= \frac{2}{\cos A} = 2 \sec A = \text{दाया पक्ष}$$

$$(iii). \frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta} = 1 + \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$$

$$\text{वाम पक्ष} = \frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta}$$

$$= \left[\frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}} \right] + \left[\frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}}{1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \right] \quad \left[\text{क्योंकि } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right]$$

$$= \left[\frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta}} \right] + \left[\frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}}{\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta}} \right]$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta (\cos \theta - \sin \theta)}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta (\sin \theta - \cos \theta)} \quad \left[\text{क्योंकि } (\cos \theta - \sin \theta) = -(\sin \theta - \cos \theta) \right]$$

$$= \frac{\sin^3 \theta - \cos^3 \theta}{\cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta)}$$

$$= \frac{(\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta)}{\cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta)} \quad \left[\text{क्योंकि } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + b^2 + ab) \right]$$

$$= \frac{(1 + \cos \theta \sin \theta)}{\cos \theta \sin \theta} \quad \left[\text{क्योंकि } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \right]$$

$$= \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} + \frac{\cos \theta \sin \theta}{\cos \theta \sin \theta}$$

$$= \sec \theta \operatorname{cosec} \theta + 1$$

$$= \text{दाया पक्ष}$$

$$(iv). \frac{1 + \sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$$

$$\text{वाम पक्ष} = \frac{1 + \sec A}{\sec A}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}} \quad \left[\text{क्योंकि } \sec A = \frac{1}{\cos A} \right]$$

$$= \frac{\cos A + 1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\cos A}$$

$$= \frac{1 + \cos A}{1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 + \cos A}{1} \times \frac{1 - \cos A}{1 - \cos A} \\
&= \frac{1 - \cos^2 A}{1 - \cos A} \\
&= \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A} \quad \left[\text{क्योंकि } 1 - \cos^2 A = \sin^2 A \right] \\
&= \text{दाँया पक्ष}
\end{aligned}$$

$$(v). \frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$$

$$\begin{aligned}
\text{वाम पक्ष} &= \frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} \\
&= \frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} \\
&= \frac{\cot A - 1 + \operatorname{cosec} A}{\cot A + 1 - \operatorname{cosec} A} \quad \left[\text{अंश और हर को } \sin A \text{ से भाग करने पर} \right] \\
&= \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - (1)}{\cot A + 1 - \operatorname{cosec} A} \\
&= \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - (\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)}{\cot A + 1 - \operatorname{cosec} A} \quad \left[\text{क्योंकि } \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1 \right] \\
&= \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - (\operatorname{cosec} A + \cot A)(\operatorname{cosec} A - \cot A)}{\cot A + 1 - \operatorname{cosec} A} \\
&= \frac{(\cot A + \operatorname{cosec} A)(1 - \operatorname{cosec} A + \cot A)}{1 - \operatorname{cosec} A + \cot A} \\
&= \cot A + \operatorname{cosec} A \\
&= \text{दाँया पक्ष}
\end{aligned}$$

$$(vi). \sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A$$

$$\begin{aligned}
\text{वाम पक्ष} &= \sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} \\
&= \sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A} \times \frac{1 + \sin A}{1 + \sin A}} \\
&= \sqrt{\frac{(1 + \sin A)^2}{1 - \sin^2 A}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}} && \left[\text{क्योंकि } 1 - \sin^2 A = \cos^2 A \right] \\
&= \frac{1 + \sin A}{\cos A} \\
&= \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} \\
&= \sec A + \tan A \\
&= \text{दाँया पक्ष}
\end{aligned}$$

(vii). $\frac{\sin \theta - 2 \sin^3 \theta}{2 \cos^3 \theta - \cos \theta} = \tan \theta$

$$\begin{aligned}
\text{वाम पक्ष} &= \frac{\sin \theta - 2 \sin^3 \theta}{2 \cos^3 \theta - \cos \theta} \\
&= \frac{\sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta)}{\cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1)} \\
&= \frac{\sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta)}{\cos \theta [2(1 - \sin^2 \theta) - 1]} && \left[\text{क्योंकि } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \right] \\
&= \frac{\sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta)}{\cos \theta (2 - 2 \cos^2 \theta - 1)} \\
&= \frac{\sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta)}{\cos \theta (1 - 2 \sin^2 \theta)} \\
&= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \\
&= \text{दाँया पक्ष}
\end{aligned}$$

(viii). $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

$$\begin{aligned}
\text{वाम पक्ष} &= (\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 \\
&= \sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2 \sin A \operatorname{cosec} A + \cos^2 A + \sec^2 A + 2 \cos A \sec A \\
&= (\sin^2 A + \cos^2 A) + \operatorname{cosec}^2 A + 2 + \sec^2 A + 2 && \left[\text{क्योंकि } \cos A \sec A = 1, \quad \sin A \operatorname{cosec} A = 1 \right] \\
&= 1 + (1 + \cot^2 A) + 2 + (1 + \tan^2 A) + 2 && \left[\text{क्योंकि } \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A, \quad \sec^2 A = 1 + \tan^2 A \right] \\
&= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A \\
&= \text{दाँया पक्ष}
\end{aligned}$$

$$(ix). (\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$$

$$\text{वाम पक्ष} = (\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin A} - \sin A \right) \left(\frac{1}{\cos A} - \cos A \right)$$

$$= \left(\frac{1 - \sin^2 A}{\sin A} \right) \left(\frac{1 - \cos^2 A}{\cos A} \right)$$

$$= \left(\frac{\cos^2 A}{\sin A} \right) \left(\frac{\sin^2 A}{\cos A} \right)$$

$$= \sin A \cos A \quad \dots (i)$$

$$= \text{दाँया पक्ष} - \frac{1}{\tan A + \cot A}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} \right)}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A \sin A} \right)}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos A \sin A} \right)}$$

$$= \cos A \sin A \quad \dots (ii)$$

समीकरण (i) और (ii) से

$$\text{वाम पक्ष} = \text{दाँया पक्ष}$$

$$(x). \frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} = \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A} \right)^2 = \tan^2 A$$

$$\text{वाम पक्ष} = \frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}$$

$$= \frac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A} \quad \left[\text{क्योंकि } \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A, \sec^2 A = 1 + \tan^2 A \right]$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 A} \right)}{\left(\frac{1}{\sin^2 A} \right)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 A} \times \frac{\sin^2 A}{1} = \tan^2 A$$

$$= \text{दाँया पक्ष}$$

$$\begin{aligned}
& \text{अब, } \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A} \right)^2 \\
&= \left(\frac{1 - \frac{\sin A}{\cos A}}{1 - \frac{\cos A}{\sin A}} \right)^2 \\
&= \left(\frac{\frac{\cos A - \sin A}{\cos A}}{\frac{\sin A - \cos A}{\sin A}} \right)^2 \\
&= \left(\frac{\cos A - \sin A}{\cos A} \times \frac{\sin A}{\sin A - \cos A} \right)^2 \\
&= \left(-\frac{\sin A - \cos A}{\cos A} \times \frac{\sin A}{\sin A - \cos A} \right)^2 \\
&= \left(-\frac{\sin A}{\cos A} \right)^2 \\
&= \tan^2 A \\
&= \text{दाया पक्ष}
\end{aligned}$$